6.1 – 6.4

ΘΕΩΡΙΑ

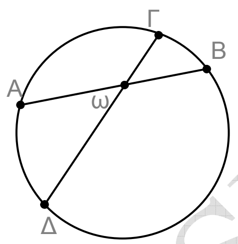
1.
Εγγεγραμμένη γωνία, αντίστοιχη επίκεντρη και τόξο

- Το μέτρο της επίκεντρης ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου.
- Η εγγεγραμμένη ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης.
- Η εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Οι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.
- Η εγγεγραμμένη ισούται με την υπό χορδής κι΄εφαπτομένης.

2.
Γωνία δύο χορδών και γωνία δύο τεμνουσών

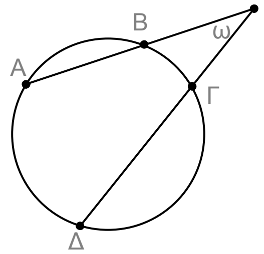
Η γωνία δύο χορδών ισούται με το ημιάθροισμα των κατακορυφήν της τόξων

$$\hat{\omega} = \frac{\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Gamma B}}{2}$$



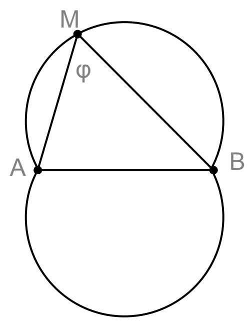
Η γωνία δύο τεμνουσών ισούται με την ημιδιαφορά των τόξων που περιέχει

$$\hat{\omega} = \frac{\overset{\frown}{A\Delta} - \overset{\frown}{\Gamma B}}{2}$$



3.
Ένας γεωμετρικός τόπος

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, που βλέπουν τμήμα ΑΒ με δοσμένη γωνία φ, είναι δύο τόξα κύκλου συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΒ, εκτός από τα Α, Β.



Ειδικά

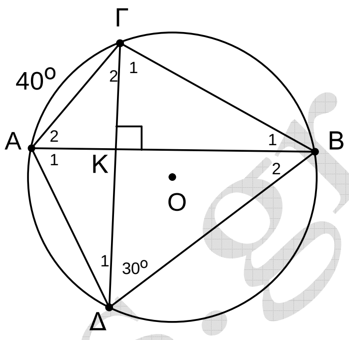
Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, που βλέπουν τμήμα ΑΒ με ορθή γωνία, είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ, εκτός από τα Α, Β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Θεωρούμε δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Ο, ρ). Αν $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = 40^o$ και $\text{Β}\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$, να υπολογιστούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ και τα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$, $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}}$ και $\overset{\frown}{\text{ΑΔ}}$.

Προτεινόμενη λύση



$\overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = 40^o \quad \Rightarrow \quad \hat{\text{Β}}_1 = 20^o$

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Β}}_1 = 20^o$

Επειδή το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ορθογώνιο,

θα είναι $\hat{\Gamma}_1 = 70^o$ άρα και $\hat{\text{Α}}_1 = 70^o$.

Αφού $\text{Β}\hat{\Delta}\Gamma = 30^o$ θα είναι και $\hat{\text{Α}}_2 = 30^o$,
λόγω δε του ορθογωνίου τριγώνου ΒΚΔ,

θα είναι $\hat{\text{Β}}_2 = 60^o$, άρα και $\hat{\Gamma}_2 = 60^o$

$\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 130^o$, $\quad \Gamma\hat{\text{Β}}\Delta = \hat{\text{Β}}_1 + \hat{\text{Β}}_2 = 80^o$, $\quad \text{Β}\hat{\Delta}\text{Α} = 30^o + \hat{\Delta}_1 = 50^o$,

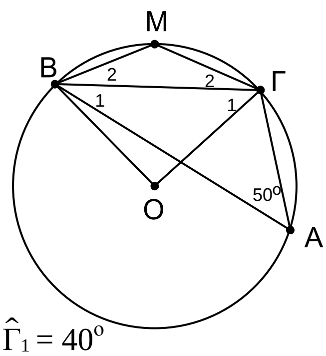
$\Gamma\hat{\text{Α}}\Delta = \hat{\text{Α}}_1 + \hat{\text{Α}}_2 = 100^o$

Ακόμα $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}} = 2 \cdot 30^o = 60^o$, $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}} = 2 \cdot 70^o = 140^o$ και $\overset{\frown}{\text{ΑΔ}} = 2 \cdot 60^o = 120^o$

2.

Σε κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε δύο σημεία Β, Γ. Έστω Μ το μέσο του μικρότερου τόξου $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$ και Α ένα σημείο του μεγαλύτερου τόξου $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$, έτσι ώστε $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma = 50^o$.
Να υπολογιστούν οι γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και του ΜΒΓ.

Προτεινόμενη λύση



Επειδή $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma = 50^o$, θα είναι $\overset{\frown}{\text{ΒΜΓ}} = 100^o$

και $\overset{\frown}{\text{ΒΑΓ}} = 260^o$

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΓ η επίκεντρη γωνία $\text{Β}\hat{\text{Ο}}\Gamma$ έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΒΜΓ}}$,

άρα είναι $\text{Β}\hat{\text{Ο}}\Gamma = 100^o$ και επομένως κάθε μία

από τις προσκείμενες στην βάση ΒΓ γωνίες θα είναι $\hat{\text{Β}}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 40^o$

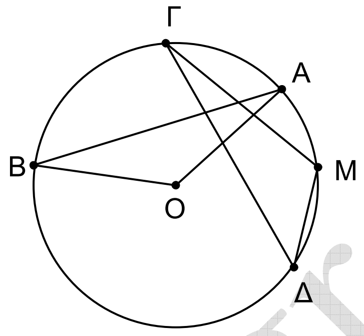
Επειδή $\overset{\frown}{\text{ΒΑΓ}} = 260^o$, η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{\text{Μ}}$ θα είναι $\hat{\text{Μ}} = 130^o$
και επομένως κάθε μία από τις προσκείμενες στην βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου

ΒΜΓ θα είναι $\hat{\text{Β}}_2 = \hat{\Gamma}_2 = 25^o$

3.

Σε κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε μία επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ και μία εγγεγραμμένη $\Gamma\hat{M}\Delta$ ίσες με 120^o. Να δείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

Προτεινόμενη λύση



$A\hat{O}B = 120^o \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{B\Gamma A} = 120^o$

$\Gamma\hat{M}\Delta = 120^o \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{\Gamma B\Delta} = 240^o$

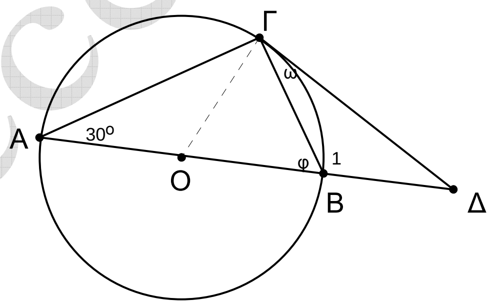
Οπότε $\overset{\frown}{\Gamma M\Delta} = 120^o$

Αφού τα μικρότερα του ημικυκλίου τόξα $\overset{\frown}{BA\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma M\Delta}$ είναι ίσα, οι αντίστοιχες χορδές τους θα είναι ίσες, άρα $AB = \Gamma\Delta$

4.

Σε κύκλο διαμέτρου ΑΒ φέρνουμε την χορδή ΑΓ έτσι ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^o$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές .

Προτεινόμενη λύση



ΑΒ διάμετρος $\Rightarrow \quad A\hat{\Gamma}B = 90^o$

$\hat{B}_1$ εξωτερική στο τρ.ΑΒΓ $\Rightarrow$

$\hat{B}_1 = 90^o + 30^o = 120^o$

Ισχύει $\hat{\omega} = \hat{A} = 30^o$ διότι η μία είναι εγγεγραμμένη και η άλλη υπό χορδής και εφαπτομένης.

Επομένως η γωνία $\hat{\Delta}$ του τριγώνου ΒΓΔ θα είναι $\hat{\Delta} = 180^o - 120^o - 30^o = 30^o$

Αφού λοιπόν είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 30^o$, το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

5.

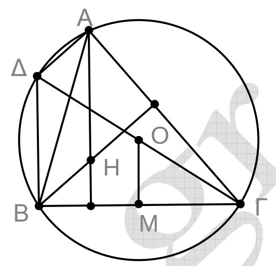
Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (Ο, ρ) ενός τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η. Από το Β φέρνουμε τη χορδή ΒΔ κάθετη στην ΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) $Α Δ \perp Α Γ$

ii) ΒΔ = ΑΗ

iii) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε $ΟΜ = \frac{ΑΗ}{2}$

Προτεινόμενη λύση



i)

$ΒΔ \perp ΒΓ \Rightarrow Δ\hat{Β}Γ = 90^o$

ΔΓ διάμετρος

$Δ\hat{Α}Γ = 90^o$

$ΑΔ \perp ΑΓ$

ii)

$ΑΗ \perp ΒΓ$ και $ΒΔ \perp ΒΓ \Rightarrow ΑΗ // ΒΔ$

Ομοίως ΔΑ // ΒΗ

Συνεπώς το ΔΑΗΒ είναι παραλληλόγραμμο

Άρα ΒΔ = ΑΗ

iii)

Στο τρίγωνο ΒΔΓ το ΟΜ ενώνει τα μέσα των ΒΓ και ΔΓ , άρα $ΟΜ = \frac{ΒΔ}{2}$

και λόγω του (ii), $ΟΜ = \frac{ΑΗ}{2}$

6.

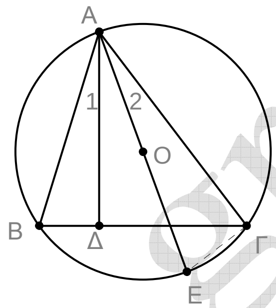
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλους του.
Αν Ε το αντιδιαμετρικό του Α και ΑΔ ύψος του τριγώνου, να δείξετε ότι

i) Οι γωνίες $\hat{A}$ και $\Delta\hat{A}E$ έχουν την ίδια διχοτόμο

ii) $\Delta\hat{A}E = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

Προτεινόμενη λύση

i)



Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

ΑΕ διάμετρος $\Rightarrow$ $A\hat{\Gamma}E = 90^o$

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ

έχουμε $\hat{B} = \hat{E}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$),

άρα θα είναι και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

ii)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $\Delta\hat{A}E + \hat{A}_2 = 90^o - \hat{\Gamma}$

και επειδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $\quad \Delta\hat{A}E + \hat{A}_1 = 90^o - \hat{\Gamma}$

$$\Delta\hat{A}E = 90^o - \hat{A}_1 - \hat{\Gamma}$$

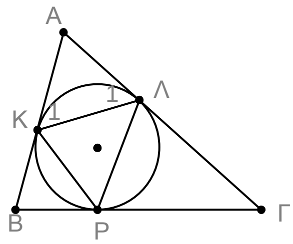
Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $90^o - \hat{A}_1 = \hat{B}$,

οπότε $\Delta\hat{A}E = \hat{B} - \hat{\Gamma}$

7.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ο εγγεγραμμένος κύκλος του, ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ στα Κ, Λ, Ρ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΚΛΡ συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ

Προτεινόμενη λύση



Είναι $K\hat{P}\Lambda = \hat{K}_1$ **(1)** (εγγεγραμμένη – υπό χορδής και εφαπτομένης)

$AK = A\Lambda \quad \Rightarrow \quad \hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1$

Αλλά $\hat{A} + \hat{K}_1 + \hat{\Lambda}_1 = 180^o \quad \Rightarrow \quad 2\hat{K}_1 = 180^o - \hat{A}$

$\hat{K}_1 = 90^o - \dfrac{\hat{A}}{2}$, και λόγω της **(1)**

$$K\hat{P}\Lambda = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$$

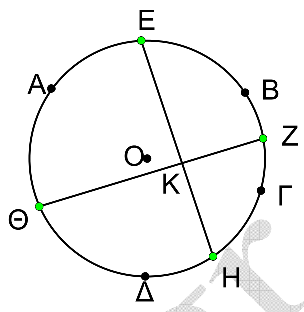
Ομοίως $P\hat{K}\Lambda = 90^o - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$ και $P\hat{\Lambda}K = 90^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$

8.

Αν E, Z, H, Θ είναι τα μέσα των διαδοχικών τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta A}$ ενός κύκλου (O, ρ), να αποδείξετε ότι $EH \perp Z\Theta$.

Προτεινόμενη λύση

Από γνωστή εφαρμογή, έχουμε



$$(E\hat{K}\Theta) = \frac{1}{2}\left[(\overset{\frown}{\Theta E}) + (\overset{\frown}{ZH})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\overset{\frown}{\Theta A}) + (\overset{\frown}{AE}) + (\overset{\frown}{Z\Gamma}) + (\overset{\frown}{\Gamma H})\right]$$

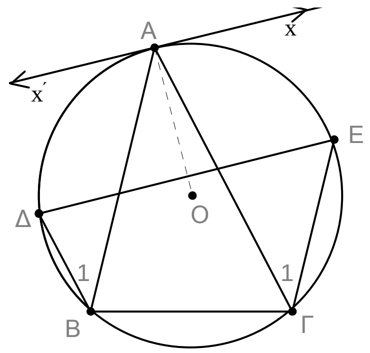
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(\overset{\frown}{\Delta A})}{2} + \frac{(\overset{\frown}{AB})}{2} + \frac{(\overset{\frown}{B\Gamma})}{2} + \frac{(\overset{\frown}{\Gamma\Delta})}{2}\right)$$

$$= \frac{(\overset{\frown}{\Delta A}) + (\overset{\frown}{AB}) + (\overset{\frown}{B\Gamma}) + (\overset{\frown}{\Gamma\Delta})}{4} = \frac{360^o}{4} = 90^o, \quad \text{άρα } EH \perp Z\Theta$$

9.

Στον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε τις χορδές $B\Delta$ και ΓE παράλληλες στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η χορδή ΔE είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A.

Προτεινόμενη λύση



Έστω $x'x$ η εφαπτομένη του κύκλου στο A και OA η ακτίνα στο σημείο επαφής.

$B\Delta \parallel A\Gamma \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}$

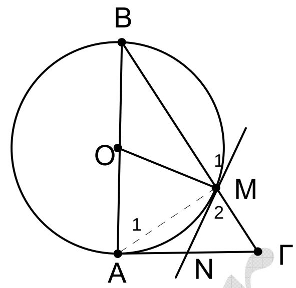
$\Gamma E \parallel AB \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{A}$

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow \overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{AE}$

Επομένως το A είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\Delta AE}$, άρα η ακτίνα OA είναι κάθετη στην χορδή ΔE και επειδή $OA \perp x'x$, θα είναι $x'x \parallel \Delta E$.

10.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ σε σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.



Προτεινόμενη λύση

Επειδή ΒΑ διάμετρος και $B\widehat{A}\Gamma = 90^o$,
η ΑΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Είναι $B\widehat{M}A = 90^o$ σαν εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.
Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΜΒ, οι γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές της $\widehat{B}$, άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}$

Όμως $\widehat{A}_1 = \widehat{M}_1$ (εγγεγραμμένη = υπό χορδής – εφαπτομένης)

και $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (κατά κορυφήν)

Άρα $\widehat{\Gamma} = \widehat{M}_2$, οπότε ΝΜ = ΝΓ

Και επειδή ΝΜ = ΝΑ (εφαπτομενικά τμήματα), θα είναι ΝΑ= ΝΓ,
άρα το Ν είναι μέσο της ΑΓ.

11.

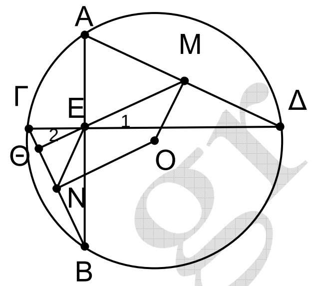
Δύο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ κύκλου (Ο, ρ) τέμνονται σε σημείο Ε.
Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των χορδών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

i) $ΜΕ \perp ΒΓ$,

ii) Το τετράπλευρο ΟΜΕΝ είναι παραλληλόγραμμο

iii) $ΟΝ = \frac{ΑΔ}{2}$

Προτεινόμενη λύση



i)

Έστω ότι η ΜΕ τέμνει τη ΒΓ στο Θ.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ, η ΕΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα

Άρα $ΕΜ = \frac{ΑΔ}{2} = ΜΔ \quad \Rightarrow \quad \hat{Ε}_1 = \hat{Δ}$

και επειδή $\hat{Δ} + \hat{Α} = 90^o$,

θα είναι $\hat{Ε}_1 + \hat{Α} = 90^o$ **(1)**

Όμως $\hat{Ε}_1 = \hat{Ε}_2$ (κατακορυφήν)

και $\hat{Α} = \hat{Γ}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{ΒΔ}$)

Οπότε, λόγω της (1), θα είναι $\hat{Ε}_2 + \hat{Γ} = 90^o$,

άρα $Γ\hat{Θ}Ε = 90^o$, οπότε $ΜΕ \perp ΒΓ$ **(2)**

ii)

Δείξαμε ότι $ΜΕ \perp ΒΓ$, επίσης, αφού Ν μέσο της ΒΓ, θα είναι $ΟΝ \perp ΒΓ$ **(3)**

Από τις (2) και (3) $\Rightarrow$ ΜΕ // ΟΝ (κάθετα τμήματα στην ίδια ευθεία)

Ομοίως προκύπτει ότι ΕΝ // ΟΜ

Άρα το ΟΜΕΝ είναι παραλληλόγραμμο.

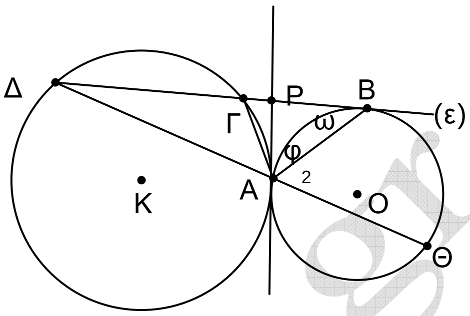
iii)

Από το (ii) προκύπτει ότι $ΟΝ = ΕΜ = \frac{ΑΔ}{2}$, όπως είδαμε στο (i).

12.

Δύο κύκλοι (Ο, ρ) και (Κ, α) εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Ευθεία (ε) εφάπτεται του (Ο, ρ) στο Β και τέμνει τον (Κ, α) στα Γ και Δ.
Να αποδείξετε ότι η ΑΒ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΓΔ

Προτεινόμενη λύση



Αν ΑΘ προέκταση της ΔΑ, τότε η $\Gamma\hat{A}\Theta$ είναι η εξωτερική γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΔΑΓ.
Φέρνω την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων η οποία τέμνει την (ε) στο Ρ.

Τότε ΡΑ = ΡΒ, οπότε $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ **(1)**

Η $\hat{A}_2$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΔΑΒ,

άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Delta} + \hat{\omega}$ **(2)**

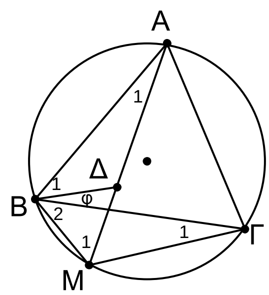
Ακόμα $\Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{A}P + \hat{\varphi}$ και επειδή $\Gamma\hat{A}P = \hat{\Delta}$ θα είναι $\Gamma\hat{A}B = \hat{\Delta} + \hat{\varphi}$ **(3)**

Από τις (1), (2), (3) έχουμε ότι $\Gamma\hat{A}B = \hat{A}_2$, δηλαδή η ΑΒ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}$.

13.

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ). Αν Μ είναι οποιοδήποτε σημείο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$, να αποδείξετε ότι ΜΒ + ΜΓ = ΜΑ.

Προτεινόμενη λύση



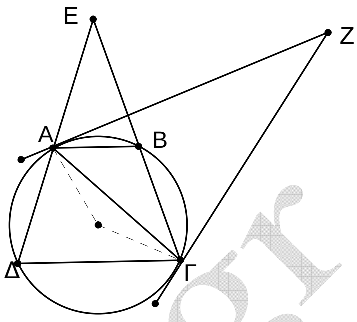
Πάνω στην ΑΜ θεωρώ ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ = ΜΒ, οπότε αρκεί να αποδείξω ότι ΑΔ = ΜΓ.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΒΔ έχουμε
$\hat{M}_1 = B\hat{\Gamma}A = 60^o$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο),
άρα το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισόπλευρο
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΜΓ έχουν

ΑΒ = ΒΓ, $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο) και $\hat{B}_1 = 60 - \hat{\varphi} = \hat{B}_2$
Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα ΑΔ = ΜΓ.

14.

Τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ //ΓΔ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ). Οι μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου τέμνονται στο Ε και οι εφαπτομένες του κύκλου στις κορυφές Α και Γ τέμνονται στο Ζ. Να αποδείξετε ότι $\hat{Z}=\hat{E}$

Προτεινόμενη λύση



ΑΒ // ΓΔ $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{\mathrm{A\Delta}}=\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ $\Rightarrow$ ΑΔ = ΒΓ.
Άρα το τραπέζιο είναι ισοσκελές
Οπότε $\hat{\Delta}=\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta$ και από το τρίγωνο ΕΔΓ έχουμε $\hat{E}=180^o-2\hat{\Delta}$ **(1)**

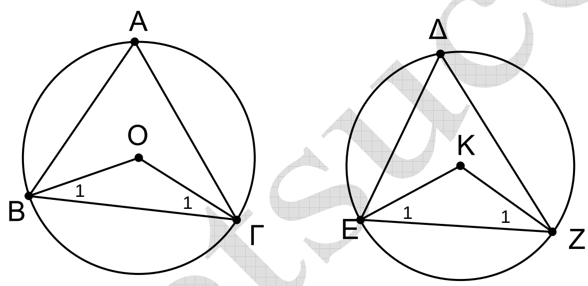
Στο τρίγωνο ΖΑΓ είναι ΖΑ = ΖΓ σαν εφαπτομενικά τμήματα, άρα $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ και επομένως $\hat{Z}=180^o-2\,\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ **(2)**

Όμως $\hat{\Delta}=\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$ (εγγεγραμμένη και υπό χορδής – εφαπτομένης)
Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε $\hat{E}=\hat{Z}$

15.

Να αποδείξετε ότι ίσα τρίγωνα έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους.

Προτεινόμενη λύση



Έστω ότι τριγ.ΑΒΓ = τριγ.ΔΕΖ με ΑΒ = ΔΕ , ΑΓ = ΔΖ, ΒΓ= ΕΖ και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους (Ο, ΒΟ) και (Κ, ΕΚ).
Τότε θα είναι και $\hat{A}=\hat{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ $2\hat{A}=2\hat{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ $\hat{O}=\hat{K}$
Επειδή τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΚΕΖ είναι ισοσκελή και έχουν τις γωνίες των κορυφών τους ίσες , θα έχουν ίσες και τις γωνίες που πρόσκεινται στις βάσεις τους.
Δηλαδή $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1=\hat{E}_1=\hat{Z}_1$
Και αφού ΒΓ = ΕΖ, τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.
Άρα ΟΒ = ΚΕ, επομένως οι περιγεγραμμένοι κύκλοι είναι ίσοι.